Les Suites Réelles

Résumé du Cours

⊗ Définition :

On appelle suite numérique toute fonction de IN vers IR, dont l'ensemble de définition est une partie I de IN.

- On note u(n) ou u_n l'image de n par u.
- Le réel u_n est appelé le terme général de la suite.
- La suite est notée : u, (u_n) ou $(u_n)_{n \in I}$.

⊗ Divers modes de définition :

1°/ Soit f une fonction définie sur $E \subset IN$. On peut alors définir la suite u par : pour tout n de E on a : $u_n = f(n)$; et on a :

- Si la fonction f est bornée sur $[0,+\infty[$ alors la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ l'est aussi.
- A partir des variations de f on étudie la monotonie de la suite u.
- Si la fonction f admet une limite ℓ lorsque x tend vers $+\infty$, alors la suite u admet la même limite.

2°/ Soit f une fonction définie sur IR. On peut définir la suite u par son premier terme u_0 et une relation « de récurrence » reliant chaque terme de la suite à celui qui le précède de la façon suivante :

$$\begin{cases} u_0 = a \in IR \\ u_{n+1} = f(u_n) . \end{cases}$$

Propriétés d'une suite :

1°/ Une suite u est dite **monotone,** si elle est **croissante ou décroissante**.

- La suite u est **croissante** lorsque pour tout n, on a:

$$u_{n+1} \geq u_n$$

- La suite u est **décroissante** lorsque pour tout n, on a :

$$u_{n+1} \leq u_n.$$

2°/ Suites majorées, Suites minorées :

La suite u est dite **majorée** (resp. **Minorée**) s'il existe un réel M (reps. m) tel que $u_n \leq$ M (resp. $u_n \geq$ m)) ; La suite est dite **bornée** si elle est à la fois majorée et minorée.

3°/ Convergences – Limites :

⊗ **Définition d'une limite finie :**

On dit que la suite u converge vers ℓ si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$; ($\ell \in \mathbb{R}$).

Une suite est divergente si elle n'admette pas une limite finie.

⊗ **Propriétés des suites convergentes :**

- Si à partir d'un certain rang on a : $|u_n - \ell| \leq v_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$.

- Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell'$ et qu'à partir d'un certain rang on a :

$$u_n \leq v_n \quad \text{alors} \quad \ell \leq \ell'$$

- Si à partir d'un certain rang on a :

$u_n \leq v_n \leq w_n$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \ell$ alors on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell$.

⊗ **Convergence des suites monotones :**

- Toute suite croissante et majorée est convergente.
- Toute suite décroissante et minorée est convergente.

⊗ **Suites convergentes et fonctions continues :**

Soit I un intervalle de IR et $f : I \mapsto IR$ une fonction continue.

Soit (u_n) la suite définie par : $u_0 \in I$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout n.

Si la suite u possède une limite finie ℓ dans I alors cette limite

vérifie $f(\ell) = \ell$

⊗ **Limites et ordre :**

- Si $u_n \leq v_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.
- Si $v_n \leq u_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$.

▷ **Suites particulières :**

⊗ **Suite arithmétique :**

- La suite u est dite arithmétique s'il existe un réel r tel que :

  $u_{n+1} - u_n = r$;pour tout entier n. Le réel r est appelé **raison** de

  la suite.

- Soit u une suite arithmétique de raison r, alors :

◊ $u_n = u_0 + n\,r = u_p + (n - p)\,r$; (n et p entiers quelconques)

◊ $S_n = u_0 + u_1 + \ldots\ldots u_n = \frac{n+1}{2}(u_0 + u_n)$.

⊗ **<u>Suite géométrique :</u>**

On dit que la suite u est géométrique s'il existe un réel q tel que : $u_{n+1} = q\,u_n$ .Le réel q s'appelle raison de la suite.

- Soit u une suite géométrique de raison q alors :

$u_n = u_0\,q^n = u_p\,q^{n-p}$; (n et p des entiers quelconques).

$$S_n = u_0 + u_1 + \ldots\ldots u_n = \begin{cases} u_0\,\dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{si } q \neq 1 \\ (n+1)\,u_0 & \text{si } q = 1 \end{cases}$$

- Si $|q| < 1$ alors u est convergente vers 0.
- Si q = 1 alors u est constante.
- Si $q \leq -1$ alors u n'admet pas de limite.
- Si $q > 1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u = \begin{cases} +\infty & \text{si } u_0 > 0 \\ -\infty & \text{si } u_0 < 0 \end{cases}$

▷ **<u>Raisonnement par récurrence :</u>**

Pour prouver qu'une propriété P(n) est vraie pour tout n, on peut montrer que :

⊕ P(0) est vraie.

⊕ Si P(n) est vraie alors P(n+ 1) est aussi vraie.

<u>Principe de la récurrence :</u>

Elle sert à prouver qu'une propriété P(n) est vraie pour tout entier n.

Elle se base en quatre étapes nécessaires.

1_ *énoncé de la propriété.* Il suffit de répéter en général ce que demande l'énoncé.

2_ *l initiation.* C'est montrer que la propriété énoncée est vraie au premier rang.

3_ *le saut.* C'est montrer que si on suppose la propriété vraie au rang n, elle est aussi vraie au rang n+1.

4_ *la conclusion.* On y dit que la propriété énoncée au début est vraie pour tout n.

On pourrait en fait comparer ce raisonnement à une échelle (que l'on imagine infiniment grande). En effet, la première étape consiste à énoncer la propriété, qui serait : *on peut aller à la hauteur qu'on veut*. La deuxième étape, l'initiation, consiste à dire : *je peux monter sur le premier barreau (donc initiation pour n=1)*, donc la propriété est vérifiée au cas du premier barreau. L'étape suivante consiste à supposer que nous soyons parvenus au barreau n, et *on veut montrer qu'on peut atteindre le barreau n+1*. Puisque *nous avons supposé la propriété vérifiée au rang n*, il n'y a aucune difficulté à monter sur le barreau suivant. Donc, si *P(n) est vraie, alors P(n+1) aussi*. Enfin, la conclusion permet de dire que si on peut aller au barreau de l'échelle qu'on veut, *on peut par conséquent aller à la hauteur qu'on désire*.

Vous voyez bien, par cet exemple, que pour prouver la propriété énoncée, vous diriez (en français) : « je monte les barreaux un à un jusqu'à la hauteur voulue ». C'est exactement ce que ce raisonnement dit, mais mathématiquement.

Voyons avec rigueur la rédaction d'un tel raisonnement (___ remplace ce que vous devez mettre suivant l'énoncé).

1° Notons, pour tout entier naturel n, la propriété (H_n) : « ___ »

2° ___, donc la propriété est vraie au rang 0 ((H_0) est vraie).

3° Supposons (H_n) vraie, et montrons que (H_{n+1}) est vraie.

___, donc, selon (H_n), ___, et par conséquent, (H_{n+1}) est vraie.

4° Finalement, pour tout entier naturel n, la propriété (H_n) est vraie.

Remarque :

Les calculs n'apparaissent qu'aux parties 2 et 3.

Dans la troisième partie, il est indispensable de se servir de l'hypothèse (H_n) vraie, sans quoi ce n'est pas une récurrence !

Je répète qu'il est facile de rapprocher le raisonnement par récurrence avec une échelle, où l'initiation serait : il existe bien un premier barreau, et où l'étape de saut serait : si on suppose qu'il y a un barreau au rang n, alors on pourra monter sur le barreau suivant.

Pour conclure, les diverses étapes de récurrence sont souvent *dictées* par l'énoncé, et il est rare que vous ayez (en terminale) à construire une récurrence sans aucune aide, donc pas de panique !